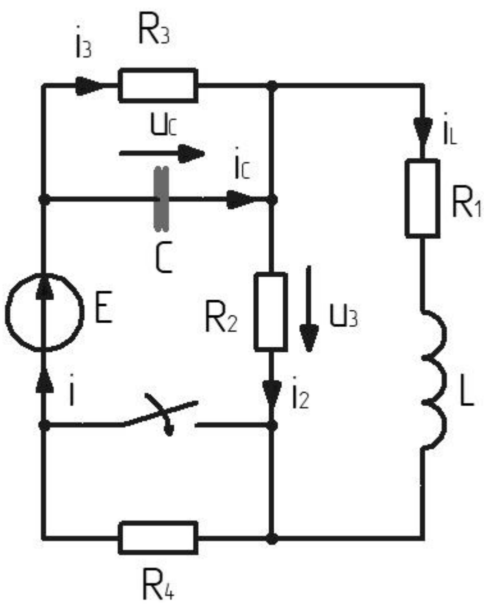


$E = 200$ В

$R_1 = 10$ Ом

$R_2 = 11$ Ом

$R_3 = 5$ Ом

$R_4 = 12$ Ом

$L = 6 \cdot 10^{-3}$ Гн

$C = 120 \cdot 10^{-6}$ Ф

Пусть в линейной электрической цепи в момент t=0 произошло замыкание ключа. Требуется найти зависимости от времени напряжения u3 в течение переходного процесса, если заданы параметры элементов цепи

Расчет тока в индуктивности и напряжения на емкости до коммутации. До коммутации цепь находилась в режиме постоянного тока. Для постоянного тока идеальная катушка индуктивности представляет собой закоротку, а конденсатор - разрыв цеппи

$$i_{0\_} = \frac{E}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4} = \frac{200}{\frac{10 \cdot 11}{10 + 11} + 5 + 12} = 8.994 \quad \text{А}$$

$$i_{30\_} = i_{0\_} = 8.994 \quad \text{А}$$

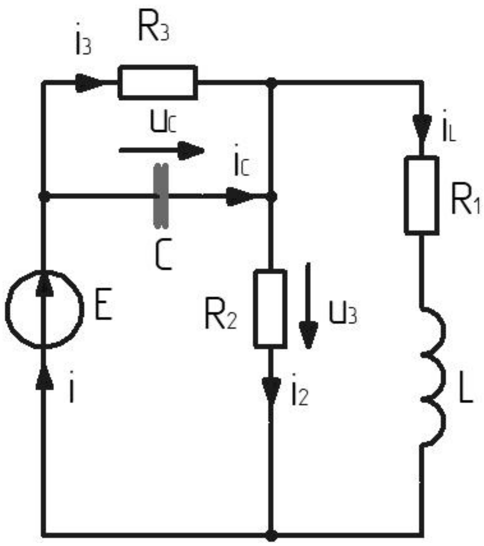
$$u_{C0\_} = i_{30\_} \cdot R_3 = 8.994 \cdot 5 = 44.968 \quad \text{В}$$

$$i_{L0\_} = i_{0\_} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 8.994 \cdot \frac{11}{10 + 11} = 4.711 \quad \text{А}$$

$$u_{C0} = u_{C0\_} = 44.968 \quad \text{В}$$

$$i_{L0} = i_{L0\_} = 4.711 \quad \text{А}$$

Составление характеристического уравнения и расчет его корней
Составим уравнения Кирхгоффа в мгновенной форме для произвольного момента времени после коммутации.
Особенность составления уравнений такова, что независимые контуры нужно выбирать так, чтобы ветвь с индуктивностью вошла в минимальное число контуров



$$i - i_3 - i_C = 0$$

$$i - i_2 - i_L = 0$$

$$i_2 \cdot R_2 + i_3 \cdot R_3 = E$$

$$i_3 \cdot R_3 - \frac{1}{C} \cdot \int i_C \, dt = 0$$

$$i_2 \cdot R_2 - i_L \cdot R_1 - L \cdot \frac{d}{dt} i_L = 0$$

$$u_3 - i_2 \cdot R_2 = 0$$

В уравнениях Кирхгоффа заменим производную любой переменной на параметр p, интеграл - на 1/p, любую переменную - на единицу и запишем полученную систему уравнений в матричной форме. Характеристическое уравнение получается путем приравнивания нулю определителя главной матрицы. Найдем корни этого уравнения

Given

$$Y = \begin{pmatrix} i & i_2 & i_3 & i_C & i_L & u_3 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -\dfrac{1}{p\cdot C} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & -R_1 - p\cdot L & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$P = \text{Find}(p) \text{ float}, 5 \;\; = \left(-2.046 \times 10^3 + 1.116j \times 10^3 \;\; -2.046 \times 10^3 - 1.116j \times 10^3\right)$$

$$P_{1,1} = -2.046 \times 10^3 + 1.116j \times 10^3$$

$$P_{1,2} = -2.046 \times 10^3 - 1.116j \times 10^3$$

Вычисление зависимых начальных условий
Зависимые начальные условия - это в начальный момент после коммутации токи во всех элементах, не являющиеся индуктивностимя, напряжения на всех элементах, не являющихся емкостями, и производные всех токов.
Токи в индуктивностях и напряжения на емкостях называются переменными состояния, а все остальные переменные - зависимыми переменными.
Для определения зависимых начальных условий составим систему уравнений Кирхгоффа в мгновенной форме после коммутации, положим t=0, применим законы коммутации и перенесем в правую часть уравнений известные токи в индуктивностях и напряжения на емкостях.
В уравнениях Кирхгоффа обозначим напряжение на емкости uc(t), а производные будем обозначать символом `.
Продифференцируем те уравнения, в которых нет производных и присоединим полученные уравнения к системе уравнений Кирхгофа. Получим систему уравнений

$$X = \left(i \;\; i_2 \;\; i_3 \;\; i_C \;\; u_3 \;\; i' \;\; i'_2 \;\; i'_3 \;\; i'_C \;\; i'_L \;\; u'_C \;\; u'_3\right)$$

$$i - i_3 - i_C = 0$$

$$i - i_2 = i_{L0}$$

$$i_2\cdot R_2 + i_3\cdot R_3 = E$$

$$i_3\cdot R_3 = u_{C0}$$

$$i_2\cdot R_2 - L\cdot i'_L = i_{L0}\cdot R_1$$

$$u_3 - i_2\cdot R_2 = 0$$

$$u'_C\cdot C - i_C = 0$$

$$i' - i'_3 - i'_C = 0$$

$$i' - i'_2 - i'_{L0} = 0$$

$$i'_2\cdot R_2 + i'_3\cdot R_3 = 0$$

$$i'_3\cdot R_3 - u'_C = 0$$

$$u'_3 - i'_2\cdot R_2 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 \\ i_{L0} \\ E \\ u_{C0} \\ i_{L0}\cdot R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = M^{-1} \cdot V =$$

	1
1	18.805
2	14.094
3	8.994
4	9.811
5	155.032
6	$1.055 \cdot 10^4$
7	$-7.433 \cdot 10^3$
8	$1.635 \cdot 10^4$
9	$-5.798 \cdot 10^3$
10	$1.799 \cdot 10^4$
11	$8.176 \cdot 10^4$
12	$-8.176 \cdot 10^4$

$$X = \left(i \;\; i_2 \;\; i_3 \;\; i_C \;\; u_3 \;\; i' \;\; i'_2 \;\; i'_3 \;\; i'_C \;\; i'_L \;\; u'_C \;\; u'_3 \right)$$

$i_0 = X_1 = 18.805$ A

$i_{20} = X_2 = 14.094$ A

$i_{30} = X_3 = 8.994$ A

$i_{C0} = X_4 = 9.811$ A

$u_{30} = X_5 = 155.032$ B

$i'_0 = X_6 = 1.055 \times 10^4$ $\frac{A}{c}$

$i'_{20} = X_7 = -7.433 \times 10^3$ $\frac{A}{c}$

$i'_{30} = X_8 = 1.635 \times 10^4$ $\frac{A}{c}$

$i'_{C0} = X_9 = -5.798 \times 10^3$ $\frac{A}{c}$

$i'_{L0} = X_{10} = 1.799 \times 10^4$ $\frac{A}{c}$

$u'_{C0} = X_{11} = 8.176 \times 10^4$ $\frac{B}{c}$

$u'_{30} = X_{12} = -8.176 \times 10^4$ $\frac{B}{c}$

$$\alpha = \mathrm{Re}\left(P_{1,1}\right) = -2.046 \times 10^3$$

$$\omega_0 = \mathrm{Im}\left(P_{1,1}\right) = 1.116 \times 10^3$$

Определение принужденных токов и напряжений

Принужденные токи и напряжения - это установившиеся токи и напряжения после завершения переходного процесса. Поскольку в цепи имеется толкько источник постоянной ЭДС, то установившиеся токи - постоянные и их нужно рассчитывать по правилам расчета постоянных токов.

$$i_{пр} = \frac{E}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{200}{\frac{10 \cdot 11}{10 + 11} + 5} = 19.535 \qquad \text{A}$$

$$u_{3пр} = i_{пр} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 19.535 \cdot \frac{10 \cdot 11}{10 + 11} = 102.326 \qquad \text{B}$$

Запишем общее решение для u3

$$u_3(t) = A_1 \cdot e^{p_{1,1} \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_{1,2} \cdot t} + u_3$$

Продифференцируем

$$\frac{d}{dt} u_3(t) = p_{1,1} \cdot A_1 \cdot e^{p_{1,1} \cdot t} + p_{1,2} \cdot A_2 \cdot e^{p_{1,2} \cdot t}$$

Расчет постоянных интегрирования

Для расчета постоянных интегрирования необходимо записать выражение искомого напряжения и его производной для момента времени t=0 и приравнять полученное выражение искомого напряжения и его производную их начальным условиям

$$A_1 + A_2 + u_{3пр} = u_{30}$$

$$p_{1,1} \cdot A_1 + p_{1,2} \cdot A_2 = u'_{30}$$

Полученную систему линейных уравнений запишем и решим в матричной форме

$$Ma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ P_{1,1} & P_{1,2} \end{pmatrix} \qquad Va = \begin{pmatrix} u_{30} - u_{3пр} \\ u'_{30} \end{pmatrix}$$

$$A = Ma^{-1} \cdot Va = \begin{pmatrix} 26.353 - 11.672j \\ 26.353 + 11.672j \end{pmatrix}$$

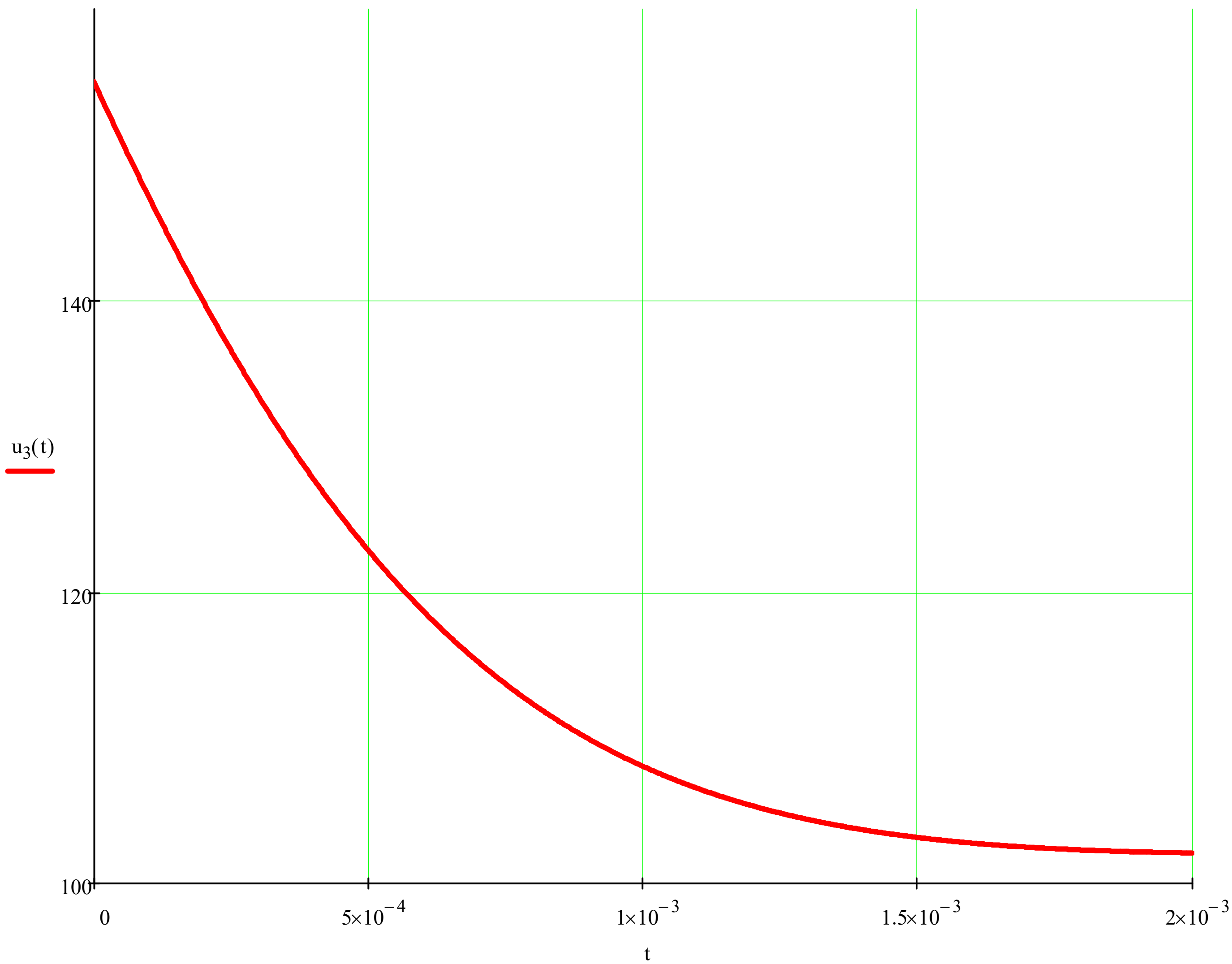
$$A_1 = 2 \left| A_1 \right| = 57.645 \qquad \text{B}$$

$$\varphi = \arg\left(A_1\right) + \frac{\pi}{2} = 1.154$$

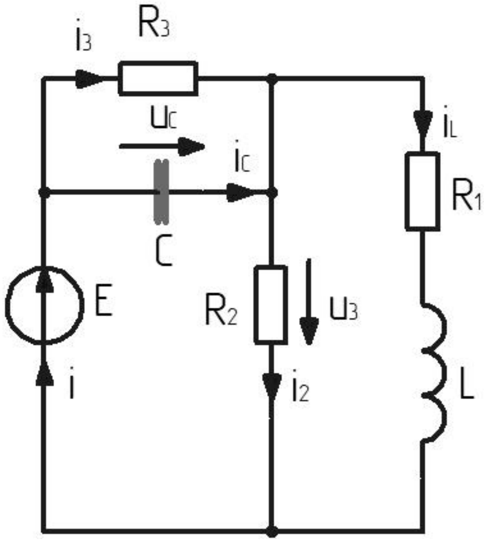
Запись решения

$$u_3(t) = A_1 \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t + \varphi\right) \cdot e^{\alpha \cdot t} + u_{3пр} = 57.645 \cdot \sin\left(1.116 \times 10^3 \cdot t + 1.154\right) \cdot e^{-2.046 \times 10^3 \cdot t} + 102.326 \qquad \text{B}$$

Построение графика



Повторим расчет переходного процесса численным методом Эйлера



Независимые начальные условия получены выше

$i_{L0} = 4.711$ А

$u_{C0} = 44.968$ В

Шаг интегрирования и количество шагов

$h = 0.000001$ $N = 3000$

Составим уравнения Кирхгоффа в мгновенной форме для произвольного момента времени после коммутации

$i - i_3 - i_C = 0$

$i - i_2 - i_L = 0$

$i_2 \cdot R_2 + i_3 \cdot R_3 = E$

$i_3 \cdot R_3 - u_C = 0$

$i_2 \cdot R_2 - L \cdot i'_L - i_L \cdot R_1 = 0$

$u_3 - i_2 \cdot R_2 = 0$

$u'_C \cdot C - i_C = 0$

$$X = \begin{pmatrix} u'_C & i'_L & u_C & i_L & i & i_2 & i_3 & i_C & u_3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & -L & 0 & -R_1 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -h & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Fkip = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = M^{-1}$$

$$X = \left| \begin{array}{l} X^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{C0} \\ i_{L0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{for } k \in 2..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} Fmet = \text{submatrix}(X, 3, 4, k-1, k-1) \\ F = \text{stack}(Fkip, Fmet) \\ X^{\langle k \rangle} = M_1 \cdot F \end{array} \right. \\ X \end{array} \right.$$

$$k = 2..N$$

Построим график учитывая что $u_3 = X_9$